PROBABILIDADE E PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

DINTER UEA-UFPE

IV LISTA

1) Fixado o número de experimentos n realizados em um ensaio de Bernoulli, qual o número mais provável de acontecimentos, entre $k=0,1,2,...,n$?

2) Distribuição geométrica. Um experimento de Bernoulli (sucesso e falha) é efetuado sucessivamente até a ocorrência do primeiro sucesso. p é a probabilidade de sucesso em uma realização. a) Se X é o número de ensaios até a ocorrência do primeiro sucesso, demonstre que $P(X=n)=(1-p)^{n-1}.p$. Esta distribuição discreta é conhecida como geométrica. b) Verifique o AX3 c) calcule o valor esperado da variável aleatória geométrica de parâmetro p.

3) Distribuição Binomial negativa. Um experimento de Bernoulli com probabilidade p é efetuado de modo independente e sucessivamente até ocorrer pela r-ésima vez. Se X é a variável aleatória que denota o número de tentativas necessárias, mostre que

$$P(X=n)=\begin{cases}\binom{n-1}{r-1}p^r(1-p)^{n-r} & n\geq r\\ 0 & senão.\end{cases}$$

Esta é conhecida como distribuição binomial negativa.

4) Seja X uma variável aleatória de distribuição conhecida. Seja $Y=KX^2$ uma transformação determinística. Avalie $F_Y(.)$ em termos de $F_X(.)$.

5) Uma tensão v=X descrita por uma variável gaussiana X passa por
   a. Um retificador de meia-onda do tipo $Y=K\frac{X+|X|}{2}$
   b. Um limitador de tensão, cuja saída é limitada entre $-V\leq Y\leq V$ para qualquer entrada.
   Avalie a densidade da variável de saída.

6) O ruído térmico em um receptor tem distribuição $N=KX^{-2}.u(X)$, em que K é fixo e conhecido. Admita que X tem distribuição log-normal. Mostre que N também tem distribuição log-normal.

7) Seja a transformação $Y=g(X)=A.\ sen(X+\theta)$. a) determine a densidade da variável transformada, b) avalie a densidade no caso particular em que $X\sim\mathcal{U}(-\pi,\pi)$.

8) As perdas em uma linha são aleatórias e um modelo propõe descreve-las por uma variável log-normal de parâmetros m,σ^2. Sendo expressa em decibéis, determine a densidade da nova variável $Y=g(X)=10.\log_{10}X$.

9) Se X é uma variável aleatória gaussiana normalizada (média 0, variância unitária) e $Y:=X^2$, mostre que X e Y são não correlacionadas, i.e Corr(X,Y)=0. Elas são independentes? O que nos ensina este exercício?

10) Uma fonte de tensão gera um sinal 2.cos($2\pi t$). Se a tensão é observada em um instante aleatório, mostre que a densidade da amplitude observada é

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} & |x| < 1 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

11) Calcule a média para as seguintes distribuições:

$X \sim \mathcal{U}(a,b)$ E(X)=(a+b)/2; $Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$, E($Y$)=1/ λ; $Z \sim \mathcal{P}(\lambda)$, E($Z$)=$\lambda$.

12) Prove as seguintes propriedades da covariância:

a) cov(X,X)=var(X) b) cov(X,Y)=cov(Y,X) c) cov(X,Y+Z)=cov(X,Y)+cov(X,Z).