PROBABILIDADE E PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

DINTER UEA-UFPE

V LISTA

1) A função conjunta de densidade de duas variáveis aleatórias é $f_{XY}(x, y) = xye^{-(x^2+y^2)/2}u(x)u(y)$. Determine e esboce as funções densidade marginais das variáveis. Elas são dependentes?

2) Seja $\{X_i\}_1^n$ uma seqüência de variáveis independentes com mesma distribuição (i.i.d.). Seja $Y = MAX\{X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n\} = \underset{i}{Max}\, X_i$.

a) Expresse $F_Y(y)$ em termos de $F_X(x)$
b) Encontre a densidade $f_Y(y)$ quando todos os $\{X_i\}_1^n$ são uniformes, $\sim\mathcal{U}(0,1)$, $i=1,2,...,n$.

3) Transformação de Hadamard.

Sejam X e Y um par de variáveis com distribuições conhecidas, densidades f_X e f_Y, respectivamente. Considere a transformada:

$$\begin{pmatrix} Z \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

Determine as distribuições das novas variáveis Z e W.

4) Seja X_1 e X_2 duas variáveis gaussianas independentes (i.i.d.) $X_i \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$. As variáveis $Y = X_1^2 + X_2^2$ e $Z=X_1/X_2$ são dependentes? Por quê?

5) (SIMULAÇÃO. Método de Box-Müller). Se U_1 e U_2 são duas variáveis aleatórias uniformes $U_i \sim \mathcal{U}(0,1)$, $i=1,2$, mostre que:
$V_1 = (-2\log U_1)^{1/2}\cos(2\pi U_2)$ e $V_2 = (-2\log U_1)^{1/2}\sin(2\pi U_2)$ são independentes e gaussianas.

6) Duas variáveis aleatórias $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ e $Y \sim \mathcal{R}(1)$, gaussiana e Rayleigh, independentes, são aplicadas em um multiplicador. Qual a distribuição da variável de saída?

7) Um sistema utiliza dois equipamentos conectados em série, cada um deles com tempo de falha descrito por uma variável com distribuição exponencial. Assim, $T_1 \sim \mathcal{E}(\lambda_1)$ e $T_2 \sim \mathcal{E}(\lambda_2)$. O tempo de falha do sistema “conexão em série” é dado por $T=\mathrm{MIN}(T_1,T_2)$. Determine a distribuição do tempo de falhas deste sistema. Generalize para $N>2$ equipamentos ligados em série. Nota: Mostre inicialmente que $f_T(t) = f_{T_1}(t)\left[1 - F_{T_2}(t)\right] + f_{T_2}(t)\left[1 - F_{T_1}(t)\right]$.

8) Análise da dependência no caso gaussiano. Sejam X_1 e X_2 variáveis aleatórias conjuntamente gaussianas, $f_{X_1X_2}(x_1,x_2)=\dfrac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\dfrac{x_1^2-2\rho x_1x_2+x_2^2}{2\sigma^2(1-\rho^2)}\right)$, $-1\le\rho\le+1$. As densidades marginais são gaussianas, com distribuição ~$\mathfrak{N}(0,\sigma^2)$. a) Mostre que as densidades condicionais valem: $f_{X_2}(x_2\mid X_1=x_1)=\dfrac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\dfrac{(x_2-\rho x_1)^2}{2\sigma^2(1-\rho^2)}\right)$. Note que ρ=0 equivale à independência. b) Que curvas descrevem os contornos de equidensidade?

As curvas de contorno podem ser mais bem visualizadas em termos de coordenadas rotacionadas de $\pi/4$, *sic*: $\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\pi/4 & -\sin\pi/4\\ \sin\pi/4 & \cos\pi/4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}Y_1\\Y_2\end{pmatrix}$ (T_θ é a matriz de rotação). Neste sistema, mostre que o expoente simplifica-se, tornando-se $x_1^2-2\rho x_1x_2+x_2^2=Y_1^2(1-\rho)+Y_2^2(1+\rho)$. Examine os casos ($\rho\neq0$, $\rho\neq\pm1$), ($\rho=0$) e ($\rho=\pm1$). Em que casos os contornos de equidensidade são elipses? E circunferência? Quando degeneram nos eixos? Desenhe os contornos para s2=1, nos casos ρ=-0,5, ρ=0, ρ=0,9.

9) Seja f convexa em (a,b), $-\infty\le a,b\le\infty$. Demonstre que $\dfrac{f(t)-f(s)}{t-s}\le\dfrac{f(u)-f(t)}{u-t}$, sempre que $a<s<t<u<b$.

10) Mostre que se $E\{f(X)\}\ge f(E(X))$ para todas as distribuições de probabilidade possíveis, então f é convexa em $\mathbb{R}$.