PROBABILIDADE E PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

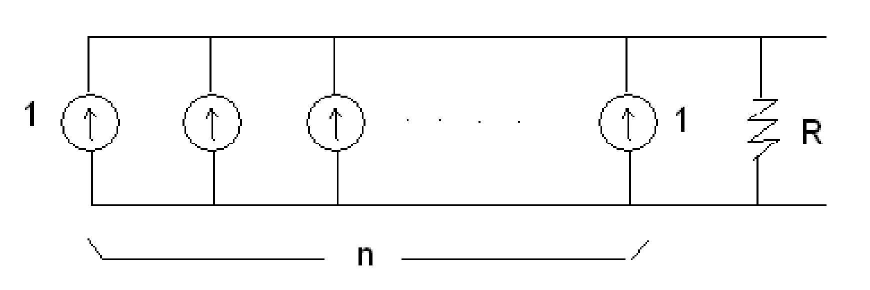
DINTER UEA-UFPE

VI LISTA

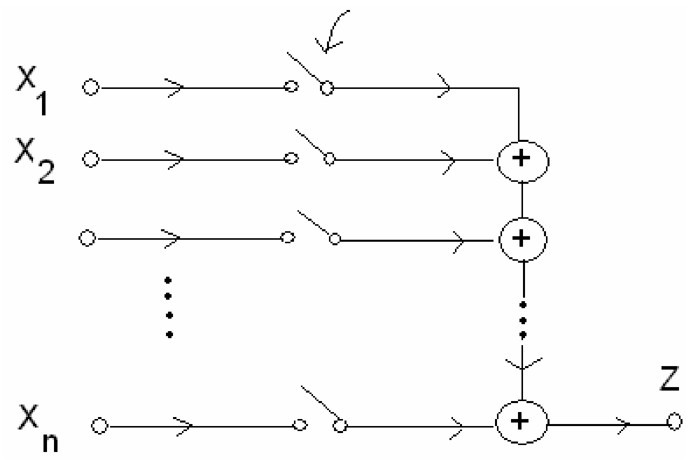
1) n fontes ideais de corrente alimentam em paralelo uma carga resistiva. Em um dado momento, cada fonte fica inoperante com probabilidade p, independente das fontes restantes. Quando uma fonte não está em operação, ela reduz-se a um circuito aberto.

a) suponha que R=1 Ω. Expresse os valores esperados da tensão em R e a potência dissipada em R, em termos de n e p.

b) Suponha agora que R seja uma variável aleatória discreta que assume o valor k com probabilidade $(1-r)r^{k-1}$, k=1,2,... e 0<r<1. Assumindo-se que R seja estatisticamente independente do número de fontes de corrente inoperantes, expresse os valores esperados da tensão em R e potência dissipada em R, em função de n, p, e r.



2) X_i são variáveis aleatórias i.i.d. $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ $1 \le i \le n$. Supondo-se que as chaves 1,2,3,...,n tem cada uma probabilidade p de estar aberta (1-p de estar fechada), independentes uma da outra e de X_i, Calcule a função característica, a média, variância e densidade, $M_Z(jv)$, E(Z), var(Z) e $f_Z(z)$.



3) Determinar os três primeiros momentos (não-centrais) de uma variável aleatória $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, usando a função característica.
N.B. $E(X)=1/\lambda$, $E(X^2)=2/\lambda^2$ e $E(X^3)=6/\lambda^3$.

4) O tempo de vida de um rádio digital é uma variável $T_v \sim \mathcal{E}(1)$. Quando há defeito, o tempo necessário para o reparo é modelado por $T_r \sim \mathcal{E}(5)$. Define-se como ciclo c do equipamento como o tempo decorrido desde quando ele entra em operação, falha uma vez e volta a operar, i.e., $c := T_v + T_r$.
a) determine a densidade de c,
b) calcule $P(c>10)$.

5) A densidade de probabilidade de uma v.a. de distribuição binomial é expressa por $f_X(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \delta(x-k)$. Determine a função característica de uma variável aleatória X com distribuição binomial $X \sim \mathcal{B}(n,p)$: a) usando a definição, b) escrevendo $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, sendo $\{X_i\}$ i.i.d., com distribuição binária de Bernoulli de parâmetro p. c) Calcule a média e a variância usando a função geradora de momentos. d) Mostre que a soma de duas variáveis $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ e $Y \sim \mathcal{B}(m,p)$ é ainda uma variável binomialmente distribuída. Quais os parâmetros da distribuição?

6) Dois subsistemas independentes operam com seis circuitos cada e o número de circuitos ativos em cada subsistema é aleatório, havendo pelo menos um circuito ativo em cada subsistema. Neles, a quantidade de circuitos operando é modelada por uma variável aleatória de distribuição uniforme. Determine e esboce a distribuição de probabilidades do número total de circuitos ativados operando no sistema e avalie a probabilidade de haver mais de 10 circuitos ativos em uma dada observação.

7) Usando a cota de Chebyshev para uma variável de média nula e variância σ^2, avalie as probabilidades de uma realização da v.a. resultar em um valor no intervalo:
a) $(-\sigma,\sigma)$, b) $(-2\sigma,2\sigma)$ e c) $(-3\sigma,3\sigma)$.
Se a variável for Gaussiana, compare estas estimativas com os valores exatos obtidos com a função erfc(.) (use o caso de variância normalizada para simplificar).

8) Considere a seqüência de v.a.'s definida a seguir. Determine para qual v.a., se é que existe alguma, a seqüência converge; e determine o sentido (tipo) da convergência.

$X_n(\omega) := \begin{cases} n & \text{em} \quad \{\omega \ni 1-\frac{1}{n^2} \le \omega \le 1 \\ 0 & \text{noutros casos} \end{cases}$, onde Ω=[0,1].

Assuma que Pr(A)=a se $A = \{\omega \ni 0 \le \omega < a\}$, $\forall 0 \le a \le 1$.

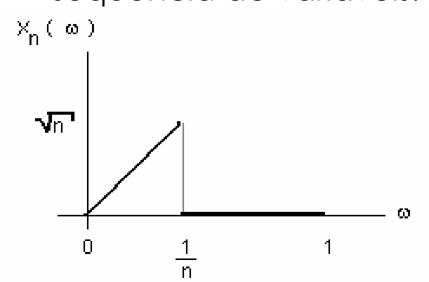
9) Considere a seqüência de variáveis aleatórias independentes:

$\Pr\{X_k = 2^k\} = \Pr\{X_k = -2^k\} = 2^{-(2k+1)}$

$\Pr\{X_k = 0\} = 1 - 2^{-(2k+1)}$

i) a seqüência X_k converge para alguma X em média quadrática?
ii) a seqüência X_k converge para alguma X em probabilidade?

10) Na convergência de seqüência de variáveis aleatórias, sabe-se que se l.i.m. $X_n = X$, então plim $X_n = X$. Entretanto, a recíproca não é verdadeira. Considere $\omega \in \Omega = [0,1]$ com distribuição uniforme e a seguinte seqüência de variáveis: verifique que isto constitui um contra-exemplo.



11) Sejam X_1, X_2, ...,X_n v.a.'s i.i.d. Ademais, suponha X_i's uniformemente distribuídas em [0,1]. Agora defina a seqüência de v.a.'s Z_n por:

$Z_n = n(1-Y_n)$, em que $Y_n = MAX(X_1, X_2, ..., X_n)$. Mostre que $Z_n \xrightarrow{d} Z$ aonde

$P_Z(z) = \begin{cases} 1-e^{-z} & z \ge 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases}$.