TEORIAS DE PROBABILIDADE

Prof. Fernando Menezes Campello de Souza, PhD

24/11/2004

Resumo

Este texto contém trechos dos livros em preparação *"Sistemas Probabilísticos"* e *"Modelos Matemáticos da Incerteza" (ou "Aleæ Geometria")*, de autoria do prof. Fernando Menezes Campello de Souza. Apresenta-se uma visão geral, com apenas alguns detalhes, da incerteza e seus modelos matemáticos.

1 Introdução

A incerteza é a marca indelével do universo. Segue-se aqui o exposto em (Fine, 1973), (Walley, 1991b), (Campello de Souza, 2002), ...

1. Incerteza (i) —Lidar com a incerteza é uma coisa para a qual todas as formas de vida devem estar preparadas. Qualquer que seja o nível de complexidade biológica do organismo em questão, existe sempre algo que pode ser interpretado como incerteza não apenas a respeito do significado dos sinais ou estímulos que a ele chegam, como também das possíveis conseqüências das ações que pode efetuar. Para todo sistema intencional (dotado de algum objetivo), contudo, a ação necessária precisa ser tomada antes de resolvida a incerteza, devendo, portanto, ser atingido o equilíbrio adequado entre um alto nível de prontidão específica para os eventos de ocorrência mais verossímil e uma capacidade geral de reagir adequadamente quando o inesperado acontece.
2. Incerteza (ii) — Na espécie humana, muitas das decisões tomadas na vida cotidiana são baseadas em crenças que dizem respeito à verossimilhança de eventos incertos. O resultado de um plebiscito, o valor futuro de um ativo financeiro, o estado de saúde de uma pessoa dentro de um mês e o regime de chuvas daqui a um ano são exemplos destes eventos. As crenças desta natureza geralmente são expressas em termos qualitativos, através de expressões do tipo: "Eu acho que ... ", "Parece que ... ", "Tudo indica que ... ", "É inverossímil que ... ", "Não é possível que ... ", e assim por diante. Uma vez ou outra, crenças que dizem respeito a eventos incertos são expressas em formas numéricas, tais como as relações de proporção (de 5 para 1, ou de 1 para 3, etc) ou as probabilidades subjetivas. De fato, as probabilidades usadas para expressar incerteza na abordagem dos problemas cotidianos podem ser de qualquer tipo, sejam as precisas usuais (Kolmogorov), como, por exemplo, na afirmação "A probabilidade do evento A é 0,4213 ", sejam as imprecisas, ou qualitativas, como na frase "A é provável "ou na frase "A é mais provável do que B ".
3. Incerteza (iii) — Em muitas situações reais, especialmente em problemas de decisão com opções contínuas de ação (por exemplo, investir X reais em algum negócio), erros grosseiros na avaliação da probabilidade de sucesso fazem relativamente pouca diferença no ganho esperado. No entanto, é preciso estar atento para dois tipos de situação que podem muito bem ocorrer. Primeiramente, pode ser que, numa situação de duas alternativas, a função utilidade seja bastante íngreme na região crucial.
4. Incerteza (iv) — Suponha, a título de ilustração, que um determinado médico deva decidir a probabilidade de que um certo paciente tenha a condição clínica A e que, logo, deve receber o tratamento A, versus ter a condição B e receber o tratamento B. Suponha ainda que as utilidades nesta situação são tais que o tratamento A é melhor se a probabilidade de que o paciente tenha a condição A for maior ou igual a 0,4; noutros casos sendo melhor o tratamento B. Se o médico estima a probabilidade de que o paciente tenha a condição A como sendo $P(A) = 0{,}45$, mas tem uma calibração ruim, pois, de fato, a probabilidade é 0,25, então adotará o tratamento A ao invés do tratamento B, e o paciente perderá uma boa fatia de utilidade esperada. Segundo, nas situações em que as conseqüências (determinísticas) são muito grandes, os erros de avaliação de probabilidade são exagerados ou quando tais erros se compõem (eventos conjuntos), a perda esperada avulta-se mais do que substancialmente. Uma das maneiras de tentar resolver ou evitar esses problemas é procurar calibrar externamente o especialista.

2 Conceitos e Teorias de Probabilidade

No chamado mundo prático, a grande maioria dos raciocínios e sistemáticas de abordagem envolve premissas e conclusões que são incertas. Isto gera, de um lado, a questão da enunciação e interpretação do conceito de probabilidade e, do outro, o problema da construção de modelos matemáticos que levem isso em consideração.

Existem muitos modelos matemáticos para a incerteza, e a qualquer um desses modelos podem ser dadas várias interpretações do conceito de probabilidade. Da mesma forma, a qualquer interpretação de probabilidade é possível associar-se diversos modelos matemáticos. Logo, uma compreensão clara e precisa deste conceito é importante para que se possa, entre coisas, aplicar conscientemente as diversas teorias com suas extensões e aproximações.

- A elaboração de modelos de fenômenos aleatórios,
- o projeto de sistemas de inferência e de tomada de decisões,
- as afirmações e verificações de aplicabilidade de leis científicas e
- as tentativas de se conhecer os mecanismos cognitivos humanos

são instâncias onde, atestando a relevância do tema, se encontram os usos formais da noção de probabilidade e dos seus conceitos e construtos associados.

3 Dimensões para uma Classificação de Teorias de Probabilidade

Fine (1973) apresenta uma classificação de teorias de probabilidade de acordo com cinco dimensões, a saber:

1. O domínio de aplicação;
2. A forma das afirmações probabilísticas;
3. As relações entre as afirmações probabilísticas;
4. As informações de entrada e os procedimentos a serem usados na mensuração ou para se chegar nas primeiras afirmações probabilísticas;
5. Os propósitos ou objetivos da teoria.

Naturalmente todas estas dimensões são interdependentes e não podem ser consideradas isoladamente.

3.1 O Domínio de Aplicação

O conjunto de fenômenos aleatórios para o qual a teoria fornece um modelo;

(a) caracterização ou modelagem de ocorrências de resultados em experimentos repetidos, potencialmente, indefinidamente;
(b) explicação do grau com o qual afirmações em uma língua sustentam ou confirmam uma a outra;
(c) classificação de seqüências, afirmações ou observações de acordo com os seus mecanismos de geração;
(d) representação das crenças, opiniões e preferências de um indivíduo.

3.2 A Forma das Afirmações Probabilísticas

(a) Se A, então A é provável. Esta é a forma modal ou classificatória da probabilidade;
(b) A é pelo menos tão provável quanto B. Probabilidade comparativa;
(c) A dado C é pelo menos tão provável quanto B dado C. Probabilidade comparativa;
(d) A dado B é pelo menos tão provável quanto C dado D. Probabilidade comparativa;
(e) A probabilidade de A é 0,37. Forma quantitativa de probabilidade (Kolmogorov).

3.3 As Relações entre as Afirmações Probabilísticas

As relações são descritas por um conjunto de axiomas ou um cálculo que permite derivar-se novas afirmativas a partir de afirmativas conhecidas e que delineia a sintaxe das afirmativas probabilísticas. Os axiomas de Kolmogorov para a probabilidade quantitativa e os eventos formam o cálculo mais conhecido. As propriedades dos eventos são delineadas através da exigência de que a coleção de eventos forme uma álgebra (por exemplo, se A é um evento, então o complemento A^C de A também é, necessariamente, um evento). São postuladas algumas propriedades das afirmativas probabilísticas (por exemplo, $0 \leq P(A) \leq 1$) e outras propriedades permitem que se derive novas afirmativas probabilísticas (por exemplo, se A contem B, então $P(A) \geq P(B)$).

3.4 As Informações de Entrada e os Procedimentos a serem usados na Mensuração ou para se chegar às Primeiras Afirmações Probabilísticas

A natureza dos dados depende muito do domínio de aplicação. O processo de medida converte o que reconhece como dados relevantes em afirmativas probabilísticas que têm a forma correta e que são mutuamente consistentes com o cálculo assumido. Ademais, o processo de medida é projetado de tal maneira a atingir os propósitos ou objetivos da teoria.

3.5 Os Propósitos ou Objetivos da Teoria

O valor e/ou significado das afirmações probabilísticas; alguns exemplos do que se diz serem os objetivos de teorias de probabilidade são os seguintes:

(a) uma afirmação de uma característica física de um experimento que manifestar-se-á sob condições prescritas;
(b) uma elaboração do raciocínio indutivo correto preocupado com avaliações de graus de certeza;
(c) uma formalização da opinião individual que leva a decisões satisfatórias ao indivíduo;
(d) uma expressão de julgamentos individuais numa forma interpessoal;
(e) uma descrição sumária de dados;
(f) seleção de um automata probabilístico como um modelo da fonte de dados.

Nota 3.1 *É claro que existem ligações naturais entre as diversas concepções de probabilidade propostas pelas várias escolas de pensamento nesse tópico e os modos de incerteza estudados pelos psicólogos. A interpretação freqüentista ou objetiva de probabilidade, por exemplo, restringe o conceito à incerteza externa gerada por um processo de amostragem. Por outro lado, a chamada escola Bayesiana, ou personalista, trata toda incerteza como ignorância.*

4 Conceitos e Teorias de Probabilidade

- Probabilidades Aleatórias — Modelam o acaso em fenômenos empíricos;
- Probabilidades Epistêmicas — Descrevem os graus de crença parcial lógicos ou psicológicos de uma pessoa ou sistema intencional.

5 Epistemologia

É o estudo da origem, natureza e limites do conhecimento humano. O nome é derivado das palavras gregas *episteme* ("conhecimento") e logos ("razão"). Os ramos da filosofia são:

1. epistemologia,
2. metafísica,
3. lógica,
4. ética e
5. estética.

A maior questão relativa ao conhecimento é saber se todo conhecimento é derivado da experiência. Existem duas tradições nitidamente opostas: empiricismo e racionalismo.

- Racionalistas: acreditam que existem idéias inatas (isto é, conceitos que o homem tem independentemente da experiência), tais como a noção de igualdade, que não são encontradas na experiência. Alguns racionalistas afirmam que estas noções derivam da estrutura da mente humana, outros que elas existem independentemente da mente e são apreendidas pela mente quando ela alcança um certo grau de sofisticação.
- Empiricistas: negam que qualquer conceito possa existir a priori da experiência, e conseqüentemente afirmam que todo conhecimento é produto do aprendizado humano no qual a percepção desempenha o papel principal. A percepção, por sua vez, é problemática, pois ilusões visuais (e outras) e alucinações mostram que ela não pode sempre descrever o mundo como ele de fato o é.
  Outro problema para os empiricistas é o status dos teoremas matemáticos cujas condições de verdade não dependem da experiência e parecem ser conhecidas a priori (isto é, antes da experiência). A resposta dos empiricistas a esta afirmação é que os teoremas matemáticos são vazios de conteúdo cognitivo e meramente expressam as relações de certos conceitos uns com os outros.

Immanuel Kant (século 18): elaborou um compromisso entre as visões competitivas. Ele argüiu que os seres humanos têm conhecimento *a priori* da experiência, não desprovidos de significância cognitiva, sendo o princípio da causalidade um tal exemplo. Esta visão pode ser resumida na máxima de que existem conceitos sintéticos *a priori*.

6 Probabilidade: Definições e Conceitos

1. *"Probabilidade é grau de certeza e difere da certeza absoluta assim como a parte difere do todo."* James Bernoulli, 1713.
2. A probabilidade de um evento é a relação entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis. Definição clássica.
3. *"Quando eu digo chance eu quero dizer o mesmo que probabilidade."* Bayes, 1763.
4. *"Assim um evento terá, pela sua própria natureza, uma chance, maior ou menor, conhecida ou desconhecida, e sua probabilidade será relativa aos nossos conhecimentos naquilo que lhe diz respeito."* Poisson, 1837.
5. A probabilidade de um evento é o limite da freqüência relativa deste evento quando o número de experimentos cresce indefinidamente. Conceito freqüentista.

6.1 Ainda sobre a Forma das Afirmações Probabilísticas

Seja D o domínio de todas as relações P_n de n termos. O domínio D pode ser tipicamente um corpo de eventos ou o conjunto de proposições numa língua simples. Uma relação P_n de n termos é um subconjunto do conjunto D^n (produto cartesiano de n-tuplas) de de elementos de D. Para diversos valores de n pode-se encontrar vários tipos de afirmações probabilísticas;

(a) uma relação unária P_1 é um subconjunto de D e pode ser lida da seguinte maneira: Se $A \in P_1$, então A é provável. Esta é a forma modal ou classificatória da probabilidade.

(b) uma relação binária P_2 é um subconjunto de D^2 e pode ser lida da seguinte forma: Se $(A, B) \in P_2$, então A é pelo menos tão provável quanto B. Uma notação mais convencional para esta forma de afirmação de probabilidade comparativa é "$A \succsim B$".

(c) uma relação ternária P_3 é um subconjunto de D^3 e, embora não geralmente usada, pode ser lida como: Se $(A, B, C) \in P_3$, então A dado C é pelo menos tão provável quanto B dado C.

(d) uma relação quaternária P_4 é um subconjunto de D^4 e pode ser lida assim: Se $(A, B, C, D) \in P_4$, então A dado B é pelo menos tão provável quanto C dado D. Uma notação mais convencional para esta forma de probabilidade comparativa condicional é "$A|B \succsim C|D''$.

A forma quantitativa (Kolmogorov) das afirmações probabilísticas ajusta-se a esse esquema relacional. Para enxergar isso é só considerá-la como uma representação numérica homomórfica de um sistema probabilístico relacional. Por exemplo, a representação de P_2 é uma função (probabilidade quantitativa) $P(\cdot)$ que satisfaz a:

(i) $P : D \to \mathbb{R}^1$
(ii) $(A, B) \in P_2 \Leftrightarrow P(A) \geq P(B)$.

A probabilidade condicional quantitativa $P(\cdot|\cdot)$ pode ser vista como uma representação de P_4 através de:

(iii) $P : D^2 \to \mathbb{R}^1$
(iv) $(A, B, C, D) \in P_4 \Leftrightarrow P(A|B) \geq P(C|D)$.

Várias representações são possíveis e nem todas elas são compatíveis com as teorias quantitativas usuais. As formas quantitativas de afirmações probabilísticas geralmente assumem implicitamente que P representa mais do que apenas as relações P_n.

Esta classificação de formas não é exaustiva, mas serve de guia para se perceber as riquezas das possibilidades.

6.2 Defesa de uma Teoria

Existem pelo menos quatro maneiras distintas de se defender uma teoria:

I) consistência interna e ausência de ambiguidade; a satisfação desses critérios é obviamente essencial para a construção de uma teoria própria para aplicação;

II) validação; valida-se uma teoria provando-se que ela conduz às conclusões que ela alega;

III) vindicação; uma teoria pode ser vindicada mostrando-se que ela leva às conclusões desejadas, se é que alguma teoria faz isso;

IV) relação com outras teorias; uma teoria pode estar relacionada a, ou subordinar, outras teorias, em termos da tipologia indicada acima; talvez ela seja aplicável sempre que alguma outra teoria o é, e em outros casos também.

Alguns termos aparecem freqüentemente nos estudos e apresentações deste assunto. A discussão do significado desses termos pode ser encontrada em textos de filosofia da ciência, mas é conveniente anotá-los aqui. São eles:

Empírico - propriedades factuais, físicas, do mundo, baseadas apenas em experimentos e observação.

Lógico - teoria formalizada de elocubração racional ou pensamento correto, seja dedutivo ou indutivo.

Objetivo - interpessoal, independente de pensamento.

Pragmático - enfatiza o prático e o bom ao invés do verdadeiro ou correto.

Subjetivo - envolve o pensamento de um indivíduo, a utilização de opiniões, julgamentos e experiências individuais.

Em termos das cinco dimensões acima, Fine (1973) apresenta uma classificação de várias teorias de probabilidade que são discutidas esmiuçadamente no seu livro, a saber:

6.2.1 Comparativa Axiomática

(1), (4) e (5) são ignoradas;
(2) relação de probabilidade comparativa;
(3) conjunto de axiomas estabelecendo uma ordem completa de eventos; outros termos são inaplicáveis.

6.2.2 Cálculo de Kolmogorov

(1), (4) e (5) são ignorados;
(2) atribuição de números a eventos;
(3) conjunto de axiomas restringindo os possíveis números de probabilidade (as probabilidades) e determinando as probabilidades de uniões disjuntas de eventos a partir daquelas dos eventos; outros termos são inaplicáveis.

6.2.3 Teoria Usual da Freqüência Relativa

(1) experimentos repetitíveis indefinidamente;
(2) quantitativa;
(3) cálculo de Kolmogorov;
(4) freqüências relativas observadas de ocorrências e princípios estatísticos ad hoc;
(5) característica física de um experimento útil para predição; concebida com a intenção de ser empírica e objetiva.

6.2.4 Teoria da Freqüência Relativa de Von Mises

(1) experimentos de um tipo especial repetitíveis indefinidamente;
(2) quantitativa;
(3) cálculo da medida de Jordan;
(4) freqüências relativas observadas, a hipótese de um coletivo e princípios estatísticos *ad hoc*.
(5) característica física de um experimento útil para predição; concebida empírica e objetivamente.

6.2.5 Teoria da Freqüência Relativa de Reichenbach-Salmon

(1) experimentos repetitíveis indefinidamente;
(2) quantitativa;
(3) finitamente aditiva, normalizada para a unidade, funções de conjunto não negativas;
(4) freqüências relativas observadas, princípios racionais de estimação;
(5) elaboração de raciocínio indutivo; lógica, empírica, concebida para ser objetiva, pragmática.

6.2.6 Teoria de Solomonoff baseada em Complexidade

(1) seqüências de símbolos de comprimentos finitos;
(2) quantitativa;
(3) incertas, embora a intenção seja que elas satisfaçam aos axiomas da aditividade finita, da não negatividade e da normalização unitária;
(4) seqüências de símbolos, hipóteses quanto às origens das seqüências, noções de simplicidade, manipulações *ad hoc* motivadas por conceitos da teoria da complexidade computacional;
(5) sumário de dados, elaboração de raciocínio indutivo, explicações das freqüências observadas em termos dos mecanismos de geração, predição de futuros termos nas seqüências; lógica, empírica, e concebida para ser objetiva.

6.2.7 Teoria Clássica de Laplace

(1) incerto, aplicada indiscriminadamente;
(2) quantitativa;
(3) cálculo de Kolmogorov ou funções de conjunto finitamente aditivas, não negativas e com normalização unitária;
(4) ignorância no que diz respeito a qual a mais verossímil de um conjunto de alternativas, não há procedimentos de medição cuidadosamente trabalhados;
(5) permite afirmações probabilísticas em muitas situações, significado incerto; não obstante algumas reinvidicações, parece ser subjetiva e possivelmente lógica.

6.2.8 Teoria Clássica de Jaynes

(1) incerto;
(2) quantitativa;
(3) cálculo de Kolmogorov;
(4) "informação testável" e aplicação do princípio de máxima entropia;
(5) permite afirmações de probabilidade em muitas situações, significado incerto; objetiva.

6.2.9 Teoria Comparativa Lógica de Koopman

(1) proposições que descrevem experimentos;
(2) comparativa;
(3) conjunto de axiomas que restringem as possíveis relações de comparação, não necessariamente completamente ordenado;
(4) intuição;
(5) incerto, uso possivelmente consistente de julgamentos; lógica, subjetiva.

6.2.10 Teoria Lógica de Carnap

(1) afirmações em certas linguagens simples;
(2) quantitativa;
(3) cálculo de funções de conjunto finitamente aditivas, não negativas, suplementadas por axiomas de invariância;
(4) princípios *a priori* de raciocínio indutivo;
(5) elaboração de raciocínio e comportamento indutivo "racional"; lógica, objetiva, e também dita pragmática.

6.2.11 Teoria Subjetiva-Personalística de De Finetti-Savage

(1) crenças individuais, julgamentos e preferências;
(2) quantitativa;
(3) axiomas fornecem restrições de consistência ou coerência;
(4) intuição ou introspecção;
(5) expressão de crenças individuais numa forma útil ao indivíduo para a seleção das suas decisões mais satisfatórias;

7 Peculiaridades Relativas ao Conceito de Probabilidade

É importante tentar entender melhor estas peculiaridades relativas ao conceito de probabilidade. Para este fim, siga-se Walley (1991).

Conforme exposto em Walley (1991), as probabilidades epistêmicas, diferentemente das aleatórias, dependem da evidência disponível (é preciso não confundir probabilidade aleatória com a estimativa da probabilidade aleatória, esta sim, dependente da evidência (dados) disponíveis). Elas podem ter as seguintes interpretações, que ajudam a entender o seu significado:

- lógica — a probabilidade epistêmica de uma hipótese relativa a um certo corpo de evidência é unívocamente determinada;
- personalista — as probabilidades são restritas apenas pelos axiomas de coerência, e não pela evidência;
- racionalística — intermediária entre os extremos lógicos e personalistas, a qual requer que as probabilidades sejam consistentes com a evidência de certas maneiras, sem exigir que elas sejam unívocamente determinadas.

Dentro dos conceitos epistêmicos, pode-se distinguir também:

- interpretações comportamentais — as probabilidades são interpretadas primariamente em termos de comportamento, tais como atitudes em apostas ou outras escolhas entre ações;
- interpretações evidenciais — a probabilidade de uma hipótese mede uma relação lógica ou linguística entre a hipótese e a evidência disponível.

As interpretações personalistas tendem a ser comportamentais, enquanto que as interpretações lógicas são usualmente evidenciais.

A distinção precedente diz respeito ao significado das probabilidades epistêmicas, mas se confunde facilmente com a questão da medida. De um modo geral, pode-se medir ou aprender sobre a probabilidade de duas maneiras fundamentais:

1. **Observação de quantidades que elas influenciam:**
   (a) Probabilidades Epistêmicas: observando-se escolhas e afirmativas num processo de edução. Para as teorias personalistas ou comportamentais de probabilidade, é natural enfatizar a edução como fonte de probabilidades.
   (b) Probabilidades Aleatórias: observando-se freqüências relativas ou outros dados estatísticos que elas geram.
2. **Construção a partir de conhecimento dos fatores que as influenciam:**
   (a) Probabilidades Epistêmicas: constrói-se a partir da evidência disponível, num processo de avaliação. Para as teorias lógicas ou evidenciais, é natural enfatizar a avaliação como fonte de probabilidades.
   (b) Probabilidades Aleatórias: constrói-se a partir de medidas de outras propriedades físicas às quais elas estão relacionadas através de leis conhecidas.

Finalmente, pode-se distinguir conceitos operacionais de probabilidade dos conceitos teóricos:

1. **Interpretações Operacionalistas**: as probabilidades são identificadas com as observações obtidas a partir de procedimentos especificados ('significado' é identificado com 'medida').
   (a) Probabilidade Epistêmica: pode ser identificada com a escolha de taxas de apostas sob condições bem definidas, por exemplo.
   (b) Probabilidade Aleatória: pode ser identificada com a freqüência relativa observada.
2. **Interpretações Teóricas**: as probabilidades modelam quantidades teóricas subjacentes (crenças ou propensões) que não são diretamente observáveis, mas as quais influenciam as observáveis através de sua interação com outras quantidades teóricas (tais como valores). Conceitos teóricos de probabilidade geralmente são **disposicionais**:
   (a) Probabilidade Epistêmica: representa as disposições a se comportar de certas maneiras.
   (b) Probabilidade Aleatória: representa as disposições a produzir os vários resultados.

Novamente, é fácil confundir conceitos operacionais com comportamentais, mas é importante distingui-los. Uma interpretação comportamental não requer nem personalismo nem operacionalismo.

Para finalizar, mais algumas considerações sobre probabilidades epistêmicas e aleatórias, ainda segundo Walley (1991).

7.0.12 Probabilidades Epistêmicas

O ato de raciocinar é inerentemente epistêmico. Por este motivo, é necessário dispor-se de algum tipo de probabilidade epistêmica para que se possa exprimir as incertezas em raciocínio e inferência. Estas probabilidades devem ser necessariamente epistêmicas, por que dependem da evidência disponível.

É conveniente que a interpretação epistêmica adotada possa dizer como as conclusões do raciocínio podem ser usadas, garanta que os modelos probabilísticos possam ser utilizados fora do contexto no qual eles foram eduzidos, e permita também que as conclusões de raciocínios ou inferências estatísticas não sejam totalmente subjetivas e arbitrárias. O enfoque da teoria desenvolvida por Walley (1991) atende a esses requisitos, pois, a interpretação por ele adotada é comportamental, teórica, racionalística e construtiva.

7.0.13 Probabilidades Aleatórias

As probabilidades que aparecem em modelos estatísticos de amostragem e em teorias científicas, as quais pretendem modelar o acaso no mundo externo, devem ter necessariamente uma interpretação aleatória. Probabilidades aleatórias aparecem não apenas em teorias físicas, como no caso da mecânica quântica e da mecânica estatística, mas também em teorias biológicas, econômicas, sociológicas, psicológicas e linguísticas. Estas teorias referem-se a fenômenos empíricos, e não às crenças de qualquer pessoa ou grupo de pessoas.

Existem dois tipos de interpretação aleatória, cada uma tendo várias versões:

- Interpretações Freqüentistas — identificam as probabilidades com freqüências relativas em classes finitas, ou como limites de freqüências relativas em seqüências infinitas; elas são quasi-operacionalistas, e baseiam-se em medidas feitas através da observação de dados estatísticos.
- Interpretações de Propensão — tomam a probabilidade (ou chance) de um evento para medir a sua tendência de ocorrer num tipo particular de experimento, e encaram probabilidades como propriedades disposicionais dos arranjos experimentais, ao invés de propriedades de classes ou seqüências; elas são teóricas e permitem que as chances sejam construídas a partir de outras propriedades físicas por meio de leis conhecidas, embora típicamente as leis requeridas (exigidas) sejam desconhecidas, e as chances devam ser inferidas a partir de dados estatísticos.

Estas interpretações, entretanto, tem uma série de questões pendentes a elas associadas (vide Walley, 1991).

As probabilidades aleatórias e epistêmicas são relacionadas através de um princípio fundamental de racionalidade chamado de Princípio da Inferência Direta: quando se conhecem os valores das probabilidades aleatórias, deve-se adotá-los como probabilidades epistêmicas e agir-se de acordo com elas. É como se as probabilidades epistêmicas fossem estimativas das probabilidades aleatórias.

8 Probabilidades Superiores e Inferiores

9 Probabilidades Imprecisas

10 Novas Ferramentas para se Lidar com a Incerteza

Fazer referência a: livro de Decisões Racionais, Decisões em Cardiologia, Edução, Escolhendo Carteiras de Investimento, etc.

11 Perguntas no Ar

1. É concebível a existência de um conceito unificado de probabilidade?
2. Como é que se reconhece o raciocínio probabilístico e o seu arcabouço de teoria da probabilidade?
3. Existem muitas formas de indeterminação, vagueza e imprecisão. Como é que o estudo do pensamento probabilístico se distingue delas?
4. A teoria da probabilidade (ou uma teoria da probabilidade) é uma teoria sobre o que? Sobre o que se fala?
5. O que se faz é uma aplicação de uma metodologia ou a aplicação de uma teoria?
6. Existe um conceito fundamental de probabilidade ou a palavra é meramente um rótulo para indicar um espaço onde se pode discutir em mais detalhes as questões subjacentes?
7. Uma atitude mais pragmática é suficiente ou apenas derrotista?
8. É possível julgar-se a satisfação (sucesso, adequação, etc.) com respeito ao conceito probabilístico proposto, de um ponto de vista fora da própria teoria/metodologia que se está usando? Caso positivo, quais poderiam ser (exemplos) os arcabouços ou espaços conceituais dentro dos quais poder-se-ia discutir este assunto?
9. Em quais contextos, por mais restritos que sejam, existe uma teoria(s) (qualquer que seja(m) esta(s)) para eles que não seja problemática (que não tenha problemas pendentes de aplicação, interpretação, atribuição, etc.)?
10. A auto-consistência é suficiente ou é no máximo necessária?
11. O que é que se sabe e como se pode expressá-lo?

12 Alguns Fatos

1. Aprendizado e representação interagem.
2. Há necessidade de se desenvolver representações menos precisas de chance e incerteza que permita preencher o *gap* que existe entre a ignorância e o conhecimento probabilístico preciso (o que quer que seja isso; mas fixe-se no modelo de Kolmogorov).
3. A precisão da representação não deve exceder a precisão inerente. Não se sabe o que não se sabe.

13 Alguns Fenômenos Não Determinísticos Imprecisos

1. **Caso Subjetivo**.
   (a) O discurso ordinário, tentando expressar um raciocínio a respeito de futuros eventos é cheio de instâncias onde emerge esses fenômenos não determinísticos imprecisos.
   Em inglês, por exemplo, como apresentado em Schwarz (1978), numa escala decrescente de verossimilhança,
   - *ABSOLUTELY,*
   - *DEFINITELY,*
   - *POSITIVELY,*
   - *CERTAINLY,*
   - *SURELY,*
   - *DECIDEDLY,*
   - *MOSTLIKELY,*
   - *PROBABLY,*
   - *PRESUMABLY,*
   - *REALLY,*
   - *HOPEFULLY,*
   - *LIKELY,*
   - *POSSIBLY,*
   - *PERHAPS,*
   - *MAYBE,*
   - *CONCEIVABLY.*

   As crenças que dizem respeito à verossimilhança de eventos incertos tais como o resultado de um plebiscito, o valor futuro de um ativo financeiro, o estado de saúde de uma pessoa dentro de um mês e o regime de chuvas daqui a um ano, geralmente são expressas em termos qualitativos, através de expressões do tipo: "Eu acho que ...", "Parece que ...", "Tudo indica que ...", "É inverossímil que ...", "Não é possível que ...", e assim por diante. Uma vez ou outra, crenças que dizem respeito a eventos incertos são expressas em formas numéricas, tais como as relações de proporção (de 5 para 1, ou de 1 para 3, etc.) ou as probabilidades subjetivas. De fato, as probabilidades usadas para expressar incerteza na abordagem dos problemas cotidianos podem ser de qualquer tipo, sejam as precisas usuais (Kolmogorov), como, por exemplo, na afirmação "A a probabilidade do evento A é 0,4213", sejam as imprecisas, ou qualitativas, como na frase "A é provável" ou na frase "A é mais provável do que B". Mais detalhes sobre este assunto podem ser encontrados em Campello de Souza (2002).

   (b) No contexto do direito e da justiça, tem-se frases como, "claro e convincente", "acima de qualquer dúvida razoável", etc. São os padrões legais de preponderância da evidência.

   (c) Fluxo de idéias.

   (d) Graus de crença a respeito da ocorrência de eventos.
2. **Caso Objetivo (Dados); (não estacionaridade)**. Nestes casos existem variáveis ("aleatórias") cotadas, e portanto momentos finitos, e portanto as fontes de dados têm dados para "queimar", mas onde ocorre

também instabilidades estatísticas (freqüências relativas que não convergem).

(a) Fontes de imagens, como, por exemplo, imagens transferidas num cert *link* escolhido de internet de alta largura de faixa (alta banda passante);
(b) Textos e falas em linguagem natural;
(c) Fenômenos de ruído Flicker que aparecem, por exemplo, na instabilidade de freqüência de osciladores de alta qualidade nos quais as médias temporais de longo prazo que deveriam ter momentos finitos exibem instabilidades persistentes quando medidas até os limites experimentais;
(d) Previsões do tempo nas quais as probabilidades são dadas em múltiplos de 10%;
(e) Variáveis relacionadas à internet, aos computadores e às comunicações, tais como tamanhos de arquivos Unix e os tamanhos de arquivos solicitados por usuários da rede, embora esta seja uma área na qual os modelos de "caudas pesadas" têm sido usados.

14 "Estilos" Estatísticos Típicos de Modelagem

Como observado em Campello de Souza (2002),

> *"Como já foi destacado, a distinção mais fundamental entre as noções de probabilidade é a existente entre os conceitos aleatório e epistêmico. As probabilidades aleatórias modelam o acaso em fenômenos empíricos. As probabilidades epistêmicas descrevem os graus de crença parcial lógicos ou psicológicos de uma pessoa ou sistema intencional.*
>
> *A relação entre a evidência disponível e os modelos probabilísticos propostos constitui um ponto fundamental neste processo. A evidência disponível, seja sob a forma de estruturas, simetrias, dados, etc., no caso aleatório, seja sob a forma de uma percepção da "realidade" eduzida de um especialista, no caso epistemológico, é que vai alimentar o modelo adotado para que se possa calibrar os seus parâmetros. Só assim o modelo poderá ser útil, seja para inferências, seja para decisões.*
>
> *As tentativas de se adequar a evidência ao modelo têm levado ao desenvolvimento de muitas teorias de probabilidade. Primeiro porque a evidência, a informação, é sempre parcial. Segundo porque muitas vezes o corpo de evidência traz embutido elementos de contradição interna, e as teorias tradicionais de probabilidade não são capazes de lidar com situações como essa."* p. 273.
>
> *"A probabilidade que apareceu tão de repente, no século XVII, tem duas características imbricadas. Por um lado ela é estatística, e diz respeito às leis estocásticas de processos aleatórios; tem a ver com as coisas. Por outro lado ela é epistemológica, isto é, está ligada ao ato de se atribuir razoáveis graus de crença a proposições totalmente desprovidas de qualquer base estatística; tem a ver com a mente. Esta é a dualidade da probabilidade que emergiu cerca de 1660. De um ponto de vista ela é estatística, e tem a ver com a estabilidade de freqüências relativas. Por outro ponto de vista ela é epistemológica, e tem a ver com o suporte que uma evidência dá a uma hipótese."* pp. 115-116.

Quando se se encontra face a situações que são inerentemente de baixa precisão, ou seja, situações devidas a:

1. Poucos dados disponíveis;
2. Muitos dados, mas as repetidas medidas não possuem a estabilidade que se esperava delas;
3. Os fenômenos são novos e não podem ser assimilados de maneira segura a outros fenômenos que tenham modelos bem aceitos;
4. Ausência de uma teoria apropriada;

as duas, por assim dizer, escolas probabilísticas atuam segundo os seus paradigmas, que são diferentes.

Os bayesianos têm a vantagem sobre os freqüentistas de uma abordagem logicamente integrada na construção e no uso dos modelos probabilísticos, que formalmente incorpora o conhecimento de base subjetivo (conhecimento *a priori*) através das distribuições *a priori*. O enfoque bayesiano, entretanto, padece do grande mal de requerer que os indivíduos aspirem a um preciso conhecimento subjetivo *a priori* que de fato é sempre ausente. A devota expectativa é que a arbitrariedade desta suposição será lavada numa torrente de dados.

Os freqüentistas têm a vantagem sobre os bayesianos de uma tentada objetividade (jamais atingida) mas tipicamente encontram-se confiando em métodos *ad hoc* tendo, na maioria dos casos,justificativas assintóticas, de novo uma defesa que requer uma "torrente" de dados.

Estas limitações são bem conhecidas por todos. Ambas compartilham um comprometimento com uma probabilidade numérica de alta precisão. É o chamado "Dogma da Precisão".

O tratamento dessas questões tem sido a consideração de probabilidades imprecisas, no espírito de Walley (1991).

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

Imprecise probability theory: a very short introduction Background and motivation

In modelling a system, it often occurs that some of its aspects, or some of the influences acting on it, are not well known. The uncertainty this produces about the system's behaviour is usually modelled by a probability distribution, and treated using techniques from probability theory. Such a model will often not be adequate, simply because not enough information is available in order to identify a unique probability distribution. In that case, techniques from the theory of imprecise probabilities, a recent extension of probability theory, can be applied in order to represent and manipulate the really available knowledge about the system.

Imprecise probability theory has been developed during the eighties and the early nineties by Peter Walley, based on the work of Smith and Williams. In Russia, Vladimir Kuznetsov developed, simultaneously and independently from Peter Walley, a theory which is very similar to imprecise probability theory. However, we-non-Russian speakers-are still waiting for the English translation of his main work.

There are many reasons to prefer imprecise probability theory above other well-known generalisations of probability theory (such as belief functions, possibility measures, fuzzy measures, credal sets, risk measures, Choquet capacities, comparative probability orderings, p-boxes, etc.). The most important reasons are: Mathematically, the theory has a unifying character: it unifies quite a number of other generalisations of probability theory. The theory has a very clear behavioural interpretation in terms of buying (or, equivalently, selling) prices, similar to de Finetti's approach to probability theory. It relies basically only on the very well-known concept of linear utility (such as money, up to some scale).

And last but not least, it leads naturally to a decision theory. The importance of this fact cannot be underestimated: in the end, most practical problems are decision problems! The optimal decision problem

Personally, I believe that one of the most profound results that arise from imprecise probability theory is found in its treating of the optimal decision problem. It is intuitively clear that if only a scarce amount of information is available about an object, then the optimal decision, whose gains and losses depend on that object, cannot be completely determined!

Imprecise probability theory grasps this aspect of the optimal decision problem in a rigorous manner, resulting in a set of possibly optimal decisions, rather than giving us, seemingly arbitrarily, only a single optimal decision from this set. From a decision making point of view, imprecise probability theory drops the completeness axiom. Imprecise probability theory is especially more desirable than probability theory in critical decision problems, that is, when gains and losses heavily depend on objects which are not completely known. One could say that imprecise probability theory allows for a more honest description of reality (or of our knowledge of it). It therefore allows for a more honest criterion of optimality too. Challenges

However, greater generality usually results in greater complexity, and imprecise probability theory provides no exception. Whereas the theory of probability is essentially a subdomain of linear mathematics (the expectation operator is a linear operator), imprecise probability theory has to rely on non-linear mathematics. Many mature concepts of probability theory, such as independence, characteristic functions, Markov processes, etc. do not carry over to imprecise probability theory in a straightforward manner.

Challenges in imprecise probability theory are (i) theoretical-the necessary tools need to be developed for describing and solving systems in which the amount of information is typically scarce; (ii) numerical-we must implement these theoretical tools in such a way that computers can solve real-life problems within a reasonable amount of time; and (iii) practical-imprecise probability theory needs to be applied in real-life problems, and compared with traditional approaches. References ...

[1] Cedric A. B. Smith. Consistency in statistical inference and decision. Journal of the Royal Statistical Society, B(23):1-37, 1961.

[2] Bruno de Finetti. Theory of Probability: A critical introductory treatment. Wiley, London, 1975.

[3] P. Williams. Indeterminate probabilities. In M. Przelecki, K. Szaniawski, and R. Wojcicki, editors, Formal Methods in the Methodology of Empirical Sciences, pages 229-246. Reidel, Dordrecht, 1976.

[4] Vladimir P. Kuznetsov. Interval Statistical Models. Radio i Svyaz Publ., Moscow, 1991. In Russian.

[5] Peter Walley. Statistical Reasoning with Imprecise Probabilities. Chapman and Hall, London, 1991.

[6] Gert de Cooman and Peter Walley. The Imprecise Probabilities Project. WWW page, 1997. http://ippserv.UGent.be/. [http] Learn more about...

[Society for Imprecise Probability Theory and Applications] http://www.sipta.org/

15 Probabilidades Superiores e Inferiores Induzidas por um Mapeamento Multívoco

Mapeamento Multivalorado:

Considere-se um espaço de medida $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mu)$ e uma função multivalorada (ponto-conjunto) definida por:

$$\Gamma : \underset{x}{X} \underset{\longmapsto}{\longrightarrow} \underset{\Gamma_x \subset S}{S}$$

Caso de uma função unívoca:

$$\Gamma : \underset{x}{X} \underset{\longmapsto}{\longrightarrow} \underset{\Gamma_x = s}{S}$$

Se Γ fosse univalorada ela induziria uma medida nos subconjuntos de S a partir de μ.

15.1 Definição de Probabilidade Superior e Inferior

$\forall T \subset S$ defina:

$$T^* = \{x \in X \mid \Gamma_x \cap T \neq \varnothing\}$$

$$T_* = \{x \in X \mid \Gamma_x \neq \varnothing, \ \Gamma_x \subset T\}$$

$$S^* = S_* = \text{domínio de } \Gamma$$

$$\xi = \{T \subset S \mid T^*, T_* \in \mathcal{F}\}$$

Suponha que $S \in \mathcal{F}$

$$P^*(T) = \frac{\mu(T^*)}{\mu(S^*)}; \qquad P_*(T) = \frac{\mu(T_*)}{\mu(S^*)} \qquad (\mu(S^*) \neq 0)$$

Como T^* consiste daqueles $x \in X$ os quais podem corresponder, possivelmente, sob Γ, a um $s \in T$, pode-se encarar naturalmente $\mu(T^*)$ como sendo a maior quantidade possível de probabilidade da medida μ que pode ser transferida para resultados $s \in T$.

Similarmente, T_* consiste daqueles $x \in X$ que necessariamente levarão a um $s \in T$, de forma que $\mu(T_*)$ representa a mínima quantidade de probabilidade que pode ser transferida para resultados $s \in T$.

O denominador $\mu(S^*)$ é um fator de renormalização necessário pelo fato de que o modelo permite, em geral, resultados em X que não mapeiam em algum subconjunto de S que faça sentido. O subconjunto ofensor $\{x \in X \mid \Gamma_x = \varnothing\}$ deve ser removido de X e a medida do conjunto remanescente S^* renormalizada para a unidade.

15.2 Caso Finito

$$S = \{s_1, \ s_2, \ ..., \ s_m\}$$

$S_{\delta_1 \delta_2 \ldots \delta_m}$ contém s_i se $\delta_i = 1$ e exclui s_i se $\delta_i = 0$, para $i = 1, \ 2, ..., \ m$.

Os 2^m subconjuntos de S assim definidos são os possíveis Γ_x e eles determinam uma partição de X em:

$$X = \cup_{\delta_1 \delta_2 \ldots \delta_m} X_{\delta 1 \delta_2 \ldots \delta_m}$$

onde

$$X_{\delta 1 \delta_2 \ldots \delta_m} = \{x \in X \mid \Gamma_x = S_{\delta_1 \delta_2 \ldots \delta_m}\}.$$

Para todo $T \subset S$ os subconjuntos T^* e T_* são uniões de subconjuntos da forma $X_{\delta 1 \delta_2 \ldots \delta_m}$ e portanto $P^*(T)$ e $P_*(T)$ são univocamente determinadas pelas 2^m quantidades

$$p_{\delta_1 \delta_2 \ldots \delta_m} = \mu(X_{\delta_1 \delta_2 \ldots \delta_m})$$

Supõe-se, é claro, que cada $X_{\delta 1 \delta_2 \ldots \delta_m}$ está em $\mathcal{F}$. Note que qualquer conjunto de 2^m números não negativos $p_{\delta_1 \delta_2 \ldots \delta_m}$ cuja soma é um determina um possível conjunto de probabilidades superiores e inferiores para todo $T \subset S = \{s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_m\}$.

15.3 Exemplo para m = 3

Neste caso

$$S = \{s_1,\ s_2,\ s_3\}$$

e

$$\xi = \{\varnothing,\ S,\ \{s_1\},\ \{s_2\},\ \{s_3\},\ \{s_1,\ s_2\},\ \{s_1,\ s_3\},\ \{s_2,\ s_3\}\}$$

Então, se $T = S_{110} = \{s_1,\ s_2\}$, por exemplo, ter-se-á:

$$T^* = X_{100} \cup X_{010} \cup X_{110} \cup X_{101} \cup X_{011} \cup X_{111}$$

e

$$T_* = X_{100} \cup X_{010} \cup X_{110}$$

e portanto

$$\mu(T^*) = p_{100} + p_{010} + p_{110} + p_{101} + p_{011} + p_{111}$$

e

$$\mu(T_*) = p_{100} + p_{010} + p_{110}.$$

Tem-se também $\mu(S^*) = 1 - p_{000}$ e pode-se então calcular as probabilidades superiores e inferiores.

15.4 Variável (*Variate*) "Aleatória"

Uma Função Real Definida em S.
Função de Distribuição Superior de V:

$$F^*(v) = P^*(V \leq v), \quad \text{para} \quad -\infty < v < \infty$$

Função de Distribuição Inferior de V:

$$F_*(v) = P_*(V \leq v), \quad \text{para} \quad -\infty < v < \infty$$

15.5 Valores Esperados Superior e Inferior de V

$$E^*(V) = \int_{-\infty}^{\infty} v dF_*(v)$$

$$E_*(V) = \int_{-\infty}^{\infty} v dF^*(v)$$

15.6 A Classe de Medidas Compatíveis sobre S

$$\mathcal{C} = \{\text{medidas}\, P \mid P_*(T) \leq P(T) \leq P^*(T)\}$$

15.7 Probabilidades Condicionais Superiores e Inferiores

15.8 Combinação de Fontes Independentes de Informação

16 Thomas BAYES (1702 - 1761)

1731. Divine Benevolence, or an attempt to prove that the Principal End of the Divine Providence and Government is the Happiness of His Creatures. Being an answer to a Pamphlet entitled: 'Divine Rectitude: or an Inquiry concerning the Moral Perfections of the Deity'. With a Regulation of the Notions therein advanced concerning Beauty and Order, the Reason of Punishment, and the necessity of a State of Trial antecedent to perfect Happiness. London: John Noon.

1736. An Introduction to the Doctrine of Fluxions, and Defence of the Mathematicians against the Objections of the Author of the Analyst, so far as they are designed to affect their general Methods of Reasoning. London: John Noon.

1763a. (published 1764.) An Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances. By the late Rev. Mr. Bayes, F.R.S. Communicated by Mr. Price, in a letter to John Canton, A.M. F.R.S. Philosophical Transactions 53: 370-418.

1763b. (published 1764.) A letter from the late Reverend Mr. Thomas Bayes, F.R.S. to John Canton, M.A. and F.R.S. Philosophical Transactions 53: 269-271.

1764. (published 1765.) A Demonstration of the Second Rule in the Essay towards the Solution of a Problem in the Doctrine of Chances, published in the Philosophical Transactions, Vol. LIII. Communicated by the Rev. Mr. Price, in a Letter to Mr. John Canton, M.A. F.R.S. Philosophical Transactions 54: 296-325.

16.1 Principais Resultados de Bayes

Problema 1. Um evento M ocorreu (sob as mesmas circunstâncias) p vezes e falhou em ocorrer q vezes. Como se pode estimar a probabilidade de ocorrência deste evento?

A solução pode ser encontrada se se pode resolver o

Problema 2. Seja $P(M)$ a probabilidade do (perfeitamente desconhecido) evento M. Para qualquer α e β, com $\alpha < \beta$, qual é o valor de $P_r[\alpha < P(M) < \beta]$? (Isto é para ser determinado antes de qualquer experimentação).

Este por sua vez pode ser resolvido usando-se a

Regra 1. Se $\beta_1 - \alpha_1 = \beta_2 - \alpha_2$ então

$$P_r[\alpha_1 < P(M) < \beta_1] = P_r[\alpha_2 < P(M) < \beta_2]$$

— isto é, uma distribuição uniforme para $P(M)$.

Ficando infeliz com este procedimento, Bayes considera então o

Problema 3. M aconteceu p vezes e falhou em acontecer q vezes. Para qualquer α e β, qual é o valor de

$$P_r[\alpha < P(M) < \beta \mid p,\ q]?$$

16.2 A "Mesa de Bilhar"

Lançamento da bola W (posição θ com distribuição uniforme) $\Longrightarrow$ o número X de ocorrências de M é binomial. Bayes calculou a probabilidade conjunta de que θ caia entre b e f e M ocorra p vezes. Na notação moderna,

$$P(b < \theta < f \cap X = p) = \int_b^f \binom{n}{p} \theta^p (1-\theta)^{n-p} d\theta$$

Fazendo $b = o$ e $f = 1$ ele obteve

$$P(X = p) = \int_0^1 \binom{n}{p} \theta^p (1-\theta)^{n-p} d\theta,$$

mais tarde calculada como sendo $1/(n+1)$. Calculou também

$$P(b < \theta < f \mid X = p) = \frac{P(b < \theta < f \ \cap \ X = p)}{P(X = p)} = $$
$$= \frac{\int_b^f \binom{n}{p} \theta^p (1-\theta)^{n-p} d\theta}{\int_o^1 \binom{n}{p} \theta^p (1-\theta)^{n-p} d\theta}.$$

17 Uma Teoria Matemática da Evidência — Glenn SHAFER (1976)

Os construtos a seguiir são devidos à Shafer (1976).

Suponha Θ um conjunto finito e denote por 2^Θ o conjunto de todos os subconjuntos de Θ. Suponha que a função Bel:$2^\Theta \to [0, 1]$ satisfaz às seguintes condições:

(1) $\text{Bel}(\varnothing) = 0$;

(2) $\text{Bel}(\Theta) = 1$;

(3) Para todo inteiro positivo n e toda coleção $A_1, \ A_2, \ ..., \ A_n$ de subconjuntos de Θ,

$$\text{Bel}(A_1 \cup \ A_2 \cup \ ... \cup \ A_n) \geq$$
$$\geq \sum_i \text{Bel}(A_i) - \sum_{i<j} \text{Bel}(A_i \cap A_j) + - \cdots +$$
$$+ \cdots (-1)^{n+1} \text{Bel}(A_1 \cap ... \cap A_n)$$

Então a função Bel é chamada de **função crença** sobre Θ.

17.1 A Representação da Ignorância: Função Crença Vacuosa

$\text{Bel}(A) = 0$ se $A \neq \Theta$; $\text{Bel}(A) = 1$ se $A = \Theta$

Exemplo: Existe ou não seres vivos orbitando a estrela Sirius? θ_1 denota a existência de vida e θ_2 denota a não existência de vida. Adota-se a função crença vacuosa em $\Theta = \{\theta_1, \ \theta_2\}$. Um conjunto mais refinado de possibilidades seria: $\Omega = \{\zeta_1, \ \zeta_2, \ \zeta_3\}$, onde ζ_1 denota a existência de vida, ζ_2 denota a existência de planetas mas não de vida e ζ_3 denota a inexistência de planetas.

O conjunto Ω está relacionado ao conjunto Θ, pois ζ_1 corresponde a θ_1, e $\{\zeta_2, \ \zeta_3\}$ corresponde a θ_2. A adoção de uma função crença vacuosa em Ω é consistente com a adoção de uma função crença vacuosa em Θ.

Um bayesiano terá dificuldades em especificar graus de crença consistentes sobre Θ e Ω que ele possa defender como representação da ignorância, pois, seguindo o paradigma bayesiano ele faria:

$$\text{Bel}(\{\theta_1\}) = \text{Bel}(\{\theta_2\}) = \frac{1}{2}$$

e

$$\text{Bel}(\{\zeta_1\}) = \text{Bel}(\{\zeta_2\}) = \text{Bel}(\{\zeta_3\}) = \frac{1}{3},$$

o que implicaria em

$$\text{Bel}(\{\zeta_1\}) = \frac{1}{3} \quad \text{e}$$

$$\text{Bel}(\{\zeta_2, \ \zeta_3\}) = \frac{2}{3}.$$

Como $\{\theta_1\}$ tem o mesmo significado de $\{\zeta_1\}$ e $\{\theta_2\}$ tem o mesmo significado de $\{\zeta_2, \ \zeta_3\}$, as atribuições são inconsistentes.

18 Probabilidade Axiomática Comparativa

Terrence Leo FINE (1973) apresenta os elementos ...

A é pelo menos tão provável quanto B. $A \succsim B$.

Axiomas

C0. (Não Trivialidade): $\Omega \succ \phi$.

C1. (Comparabilidade): $A \succsim B$ ou $B \succsim A$.

C2. (Transitividade): $A \succsim B, \ B \succsim C \Longrightarrow A \succsim C$.

C3. (Improbabilidade da Impossibilidade): $A \succsim \phi$.

C4. (Uniões Disjuntas):

$$A \cap (B \cup C) = \phi \Longrightarrow (B \succsim C \Longleftrightarrow A \cup B \succsim A \cup C).$$

C5a. $(\mathcal{F}, \ \mathcal{T})$ tem uma base contável.

C5b. $(\mathcal{F}, \ \mathcal{T})$ tem um conjunto denso em ordem contável.

18.1 Bases para um Interesse Maior

(1) CP fornece um modelo mais realista dos fenômenos aleatórios quando se tem muito pouca informação *a priori* e dados para estimar uma probabilidade quantitativa razoavelmente.

(2) CP fornece uma classe maior de modelos de fenômenos aleatórios do que a teoria quantitativa usual.

(3) CP ilumina a estrutura da probabilidade quantitativa, e especialmente os axiomas de Kolmogorov, através de fornecimento de uma base a partir da qual se possa derivar a probabilidade quantitativa.

(4) CP parece ser um conceito suficientemente rico para apoiar uma variedade de significantes aplicações.

19 Raciocínio Estatístico com Probabilidades Estatísticas

Peter WALLEY (1991)

$(\Omega, \mathcal{H}, \underline{P})$ onde Ω = possíveis estados das coisas; $\mathcal{H}$= uma classe de jogos;

$\underline{P}$=previsão (*prevision*) inferior

Um jogo X é uma função real cotada em Ω a qual é interpretada como um prêmio incerto. As premiações $X(\omega)$ são medidas em unidades de utilidade linear, tais como a 'moeda probabilística' que é construída no desenvolver da teoria.

As previsões inferiores $\underline{P}$ são introduzidas como modelos de crenças acerca de Ω. A interpretação comportamental é que se está disposto a pagar qualquer preço menor do que $\underline{P}(X)$ pelo jogo X. Quando $\mathcal{H}$ é um espaço linear de jogos, a coerência de $\underline{P}$ é caracterizada por três axiomas, os quais são válidos para todo X e Y em $\mathcal{H}$ constantes positivas λ:

(P1) $\underline{P}(X) \geq \inf(X)$,

(P2) $\underline{P}(\lambda X) = \lambda \underline{P}(X)$

(P3) $\underline{P}(X+Y) \geq \underline{P}(X) + \underline{P}(Y)$.

19.1 Objetivos do Trabalho

1) Desenvolver uma teoria matemática de probabilidades imprecisas e suas aplicações ao raciocínio probabilístico, inferência estatística e decisão, baseada numa interpretação comportamental e princípios de coerência.

2) Comparar esta teoria com a teoria bayesiana, para defender a introdução da imprecisão.

3) Considerar as maneiras pelas quais uma teoria comportamental difere da análise de sensibilidade bayesiana.

4) Sugerir alguns modelos e estratégias úteis para estabelecer probabilidades imprecisas.

20 Uma Nova Maneira de Calcular e Representar a Incerteza

Fernando Menezes CAMPELLO DE SOUZA (2000)

20.1 Teorias de Probabilidade

Fernando Menezes Campello de Souza, PhD

> *"The labours of others have raised for us an imense reservoir of important facts."* Charles Dickens, Pickwick Papers.
>
> *"I hope the gentle reader will excuse me for dwelling on these & the like particulars, which, however insignificant they may appear to grovelling vulgar minds, yet will certainly help a philosopher to enlarge his thoughts and imagination, and apply them to the benefit of public as well as private life."* Jonathan Swift, Travels into several Remote Nations of the World, by L. Gulliver.

Fernando Menezes Campello de Souza

Referências Bibliográficas

Bayes, Thomas. 1763. An essay towards solving a problem in the doctrine of chances. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, **53**, 370–418.

Bernoulli, James. 1713. *Ars Conjectandi.* Basilea: Thurnisius. O final da *Pars Quarta* está traduzido para o português em Campello de Souza et al. (2002), Elementos da Pesquisa Científica em Medicina (Editora da Universidade Federal de Pernambuco; ISBN 85-7315-179-X) e o teorema, para o inglês, em Hald (1990), A History of Probability & Statistics and Their Applications before 1750; Wiley. No capítulo 5 deste livro apresenta-se tanto a tradução para o português do final da *Pars Quarta*, quanto o teorema.

Campello de Souza, Fernando Menezes. 2002. *Decisões Racionais em Situações de Incerteza.* 1 edn. Recife: Editora Universitária da Universidade Federal de Pernambuco. ISBN-85-7315-178-1.

Dempster, Arthur P. 1967. Upper and lower probabilities induced by a multi-valued mapping. *Annals of Mathematical Statistics*, **38**, 325–339.

Fine, Terrence L. 1973. *Theories of Probability: An Examination of Foundations.* New York: Academic Press.

Poisson, Siméon Denis. 1837. *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile, précédés des règles générales du calcul des probabilités.* Paris: Bachelier.

Schwarz, Hanns. 1978. *Statistics: A guide to the Unknown.* 2 edn. Holden-Day Series in Probability and Statistics; E. H. Lehmann (Editor). San Francisco, USA: Holden-Day. ISBN 0-8162-8605-1. Chap. The Use of Subjective Probability Methods in Estimating Demand, pages 259–268.

Shafer, Glenn. 1976. *A Mathematical Theory of Evidence.* Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

Walley, Peter. 1991a. *Statistical Reasoning with Imprecise Probabilities.* Chapman and Hall.

Walley, Peter. 1991b. *Statistical Reasoning with Imprecise Probabilities.* Chapman and Hall.