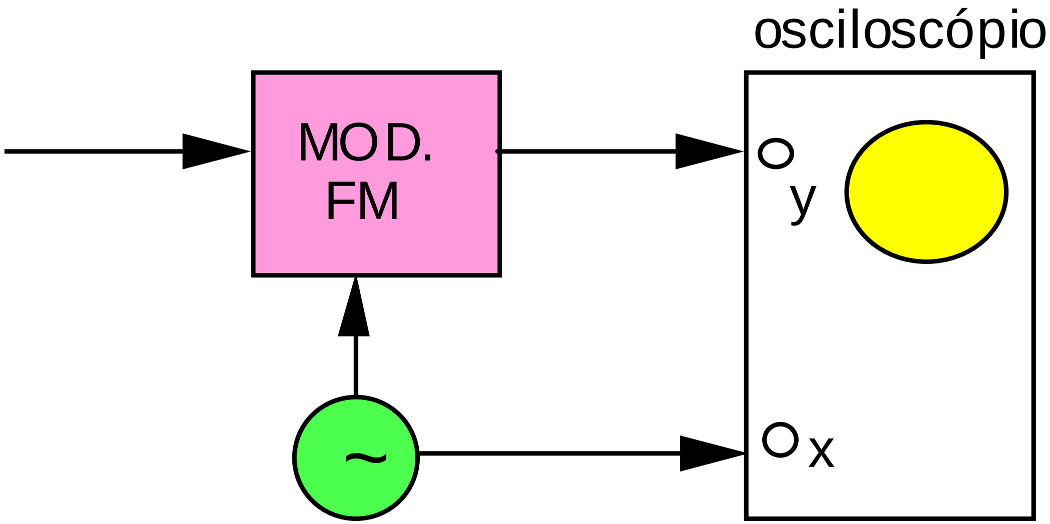
Figuras de Lissajours

Medição da Constante do Modulador de um Gerador FM com auxílio de um Osciloscópio e de um gerador de áudio.



Colocando-se o osciloscópio em modo de operação X-Y, em que *y* é um sinal FM e *x* é uma portadora na freqüência do sinal FM, têm-se:

x=Acosw_ct e y= $\varphi_{FM}(t) = A\cos\left[w_c t + 2\pi K_f \int_{-\infty}^{t} f(t')dt'\right]$.

Definindo $\phi(t) \equiv 2\pi K_f \int f(t')dt'$ e escrevendo y em termos de x,

$$y = x\cos\phi(t) - \sqrt{A^2 - x^2}\, sen\phi(t).$$

Daí obtém-se a relação:

$$x^2 - 2xy\cos\phi + y^2 = A^2 sen^2\,\phi\,.$$

Fazendo-se uma mudança de eixos que corresponde a uma rotação de um ângulo θ no sistema de coordenadas:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & sen\theta \\ -sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}.$$

Após a substituição para obter a equação da curva no novo sistema de coordenadas, obtém-se depois de algumas manipulações e simplificações:

$$A^2 sen^2\phi = [1+sen2\theta\cos\phi]\tilde{x}^2 + [1-sen2\theta\cos\phi]\tilde{y}^2 - 2\tilde{x}\tilde{y}(\cos 2\theta)\cos\phi$$

.

Tomando-se o valor $\theta=\pi/4$, $\cos 2\theta=0$ e $\mathrm{sen}2\theta=1$ de modo que a equação simplifica, assumindo a forma:

$$A^2 sen^2\phi = [1+\cos\phi]\tilde{x}^2 + [1-\cos\phi]\tilde{y}^2 .$$

Para $\phi \neq k\pi$, *k* inteiro, a equação anterior descreve uma elipse

$\dfrac{\tilde{x}^2}{a^2} + \dfrac{\tilde{y}^2}{b^2} = 1$, em que

$$a^2 \equiv \frac{A^2 sen^2\phi}{1+\cos\phi} \quad \text{e} \quad b^2 \equiv \frac{A^2 sen^2\phi}{1-\cos\phi}\,.$$

- Para $\phi=0$, então $\tilde{x}=0$ e $\tilde{y}$ é qualquer (eixo $\tilde{y}$), correspondendo a uma reta (fig. a).

A medida que ϕ cresce, $0<\phi<\pi/2$, obtém-se uma elipse com semi-eixos $b>a$ (c.f. fig. b).

- Já para $\phi=\pi/2$, tem-se exatamente uma circunferência de raio igual a A (c.f. fig. c).

Com $\pi/2<\phi<\pi$, novamente elipses são obtidas, porém com $a>b$ (fig. d).

- Se $\phi=\pi$, então $\tilde{x}$ é qualquer e $\tilde{y}=0$ (eixo $\tilde{x}$), correspondendo a uma reta (fig. e).

Finalmente, entre $\pi\leq\phi\leq2\pi$, as figuras geradas vão desde (e) até (a).

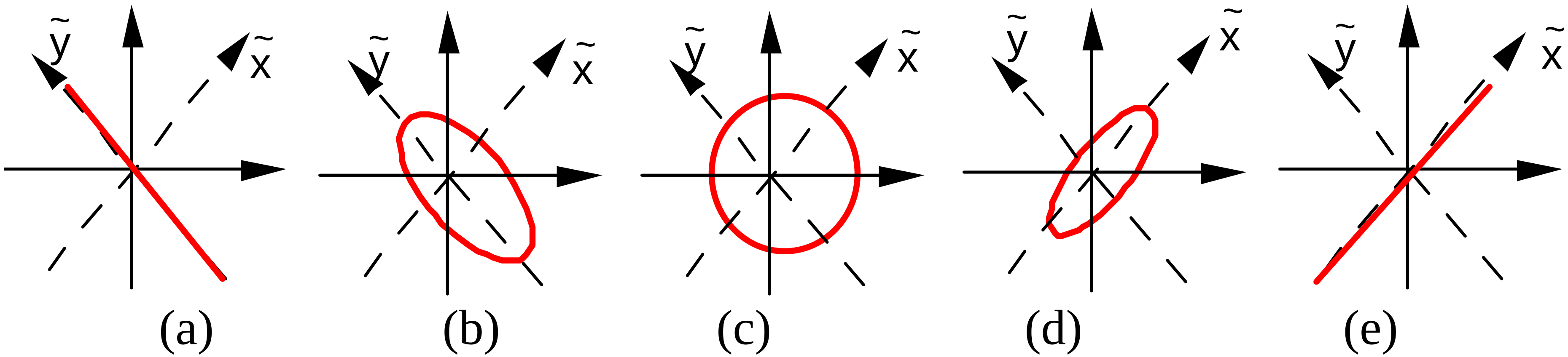


Figura. Formas de onda observadas num osciloscópio— Figuras de Lissajours.

Nota: A implementação prática requer, no entanto, amarrar a freqüência da portadora ao sinal FM. Isto porque qualquer derivação resulta em $\phi(t)$ ilimitado. Um circuito AFC deve ser usado para o controle do oscilador.